Año II - Número 2 - Junio 2014

# NOTAS DE GEOMETRÍA

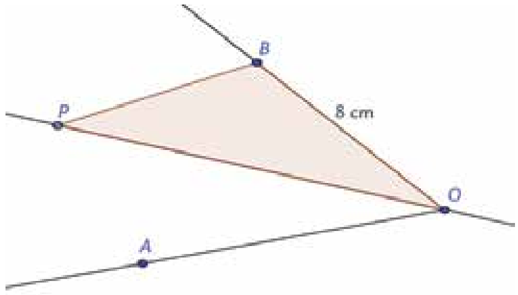
Redacctadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

## 2 SEGUNDA NOTA

Pitágoras. Mediatriz. Bisectriz. Circunferencia. Cuerdas y tangentes. Circunferencia inscripta y circunferencia circunscripta. Arco capaz. Semejanza. Construcciones con regla y compás.

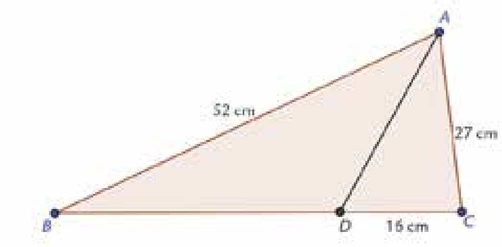
Apéndice: Resultados aplicables a la resolución de problemas. Pitágoras. Mediatriz. Bisectriz. Circunferencia. Cuerdas y tangentes. Circunferencia inscripta y circunferencia circunscripta. Arco capaz.




**Problema 1** El punto $P$ se encuentra sobre la bisectriz del ángulo $AOB$ y su distancia a la recta $OA$ es 6 cm. Si $OB$ mide 8 cm, ¿cuál es el área del triángulo $OBP$?

**Solución:**

El área del triángulo $OBP$ es la longitud de $OB$ por la altura medida desde $P$, y esto, dividido por 2. La altura por $P$ es precisamente, la distancia entre $P$ y la recta determinada por $OB$. Dado que $P$ se encuentra en la bisectriz del ángulo $AOB$, la distancia entre $P$ y la recta determinada por $OB$ coincide con la distancia entre $P$ y la recta determinada por $OA$, esto es 6cm. Se tiene entonces que el área de $OBP$ es igual a 24 cm$^2$.




**Problema 2** En el triángulo $ABC$, el segmento $AD$ está sobre la bisectriz del ángulo $A$. Hallar el perímetro de $ABC$ si $AB = 52$ cm, $AC = 27$ cm y $CD = 16$ cm.

**Solución:**

Por propiedad de la bisectriz, debe ser:

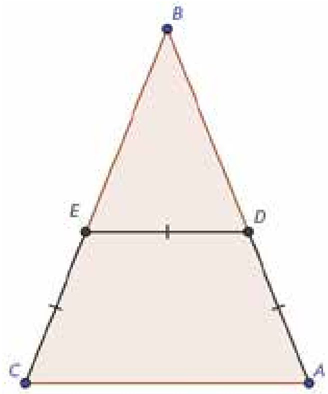
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CD}$$

De donde se deduce que:

$$\frac{52}{27} = \frac{DB}{16}$$

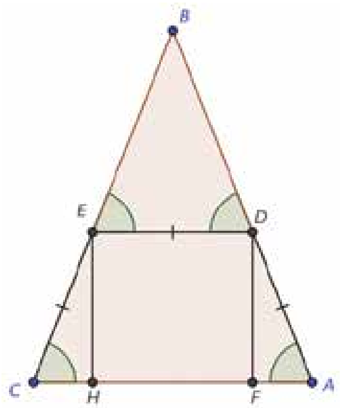
Luego $DB = 30{,}81$ y el perímetro buscado resulta:

$$30{,}81 + 16 + 27 + 52 = 125{,}81$$




**Problema 3** Usando reglas y compás construir la poligonal $ADEC$ sobre el triángulo isósceles $ABC$ de modo que $AD = DE = EC$.

**Solución:**




Suponemos el problema resuelto como se muestra en la figura. Trazando los segmentos $EH$ y $DF$ perpendiculares a $AC$, se puede observar que los triángulos rectángulos $ADF$ y $HEC$ son iguales, por ser $AD = CE$ y los ángulos adyacentes a estos lados iguales.

Se concluye que $FD = HE$, luego $ED$ y $AC$ son segmentos paralelos. Por este motivo, los triángulos $ABC$ y $DBE$ son semejantes, es decir:

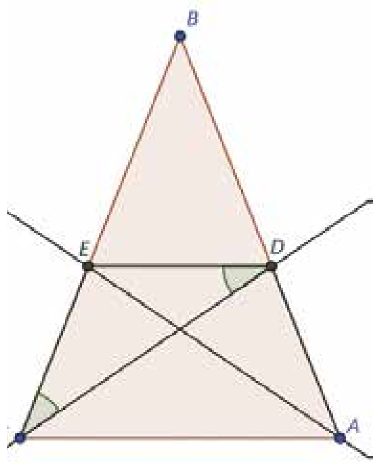
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$$

o bien:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DB}$$

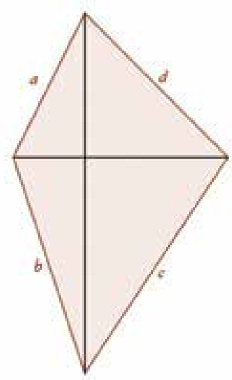
Reemplazando en la igualdad anterior, los segmentos $DE$ y $DB$ respectivamente por $CE$ y $EB$, se tiene:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB}$$



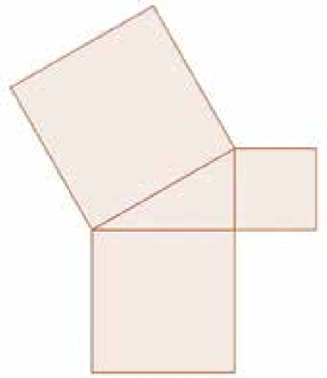

Usando una propiedad de la bisectriz dada en el apéndice, esta relación indica que $E$ está en la bisectriz del ángulo en el vértice $A$. Por la simetría de la figura, el punto $D$ debe encontrarse en la bisectriz del ángulo en el vértice $C$.
Del análisis precedente surge una manera de resolver el problema: basta trazar las bisectrices de los ángulos en los vértices $A$ y $C$; de la intersección de las mismas con los lados $BC$ y $AB$ respectivamente, se obtienen los puntos $E$ y $D$.
Justificamos la construcción observando que $DE$ y $AC$ son paralelas, dado que los triángulos $ADC$ y $AEC$ son iguales. Por ángulos entre paralelas, se tiene el ángulo $EDC$ igual al ángulo $ACD$ que a su vez es igual al ángulo $DEC$, esto muestra que el triángulo $CDE$ es isósceles con base $CD$, se deduce que los segmentos $CE$ y $ED$ son iguales. Análogamente, se comprueba que los segmentos $AD$ y $DE$ son iguales.

**Problema 4** Un cuadrilátero de lados consecutivos $a$, $b$, $c$, $d$ tiene sus diagonales perpendiculares entre sí. Calcular $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

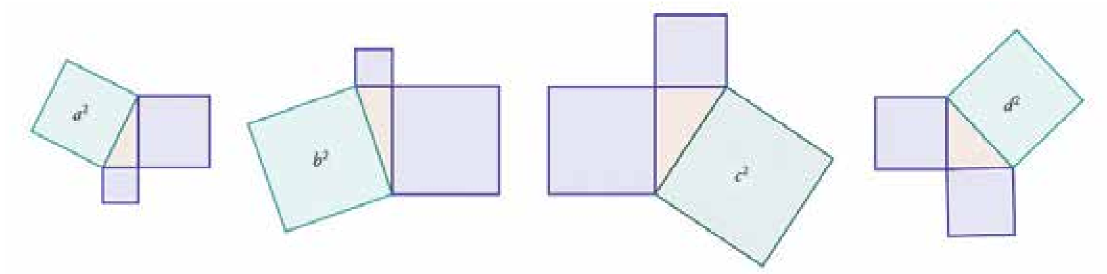


## Solución:

Según el teorema de Pitágoras, si sobre los lados de un triángulo rectángulo se dibujan cuadrados, como ilustra la figura:



se tiene que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos, es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa. Aplicando este principio a los cuatro triángulos rectángulos en los que las diagonales descomponen al cuadrilátero dado:

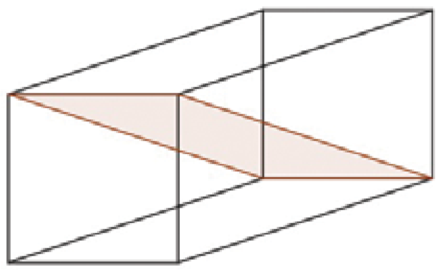



se puede efectuar la cuenta $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ reemplazando cada cuadrado por la suma de los dos cuadrados correspondientes. Cancelando los cuadrados iguales se obtiene que $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$.

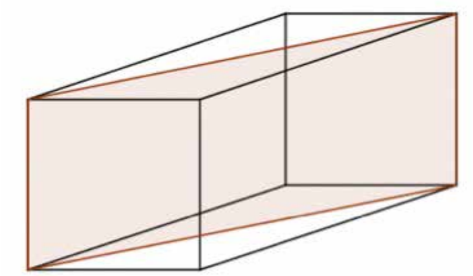
## Problema 5

**En un bloque de cemento de 30 cm por 30 cm por 40 cm, se practica un corte plano como indica la figura.**

**Calcular el área, el perímetro y la diagonal de la sección de corte.**



## Solución:



Cambiando la posición del bloque, podemos ver con claridad que la sección es rectangular.

El lado más corto en la sección es de 30 cm, mientras que el lado más largo, visto como diagonal de uno de los rectángulos sobre una cara lateral del bloque, mide:

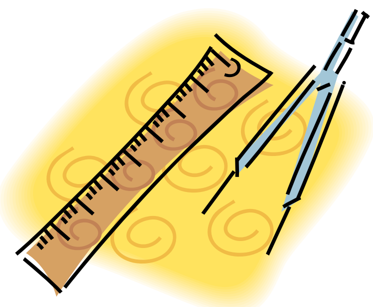
$$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$$

De modo que el área, el perímetro y diagonal miden respectivamente:

$$30\,\text{cm} \times 50\,\text{cm} = 1500\,\text{cm}^2$$

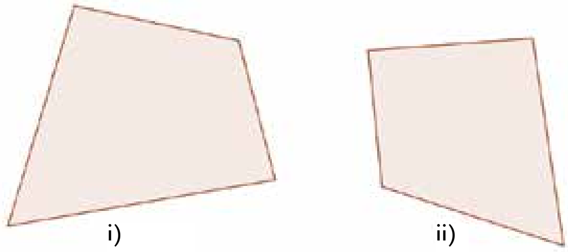
$$(30\,\text{cm} + 50\,\text{cm}) \times 2 = 160\,\text{cm}$$

$$\left(\sqrt{30^2 + 50^2}\right)\text{cm} = 58{,}31\,\text{cm}$$



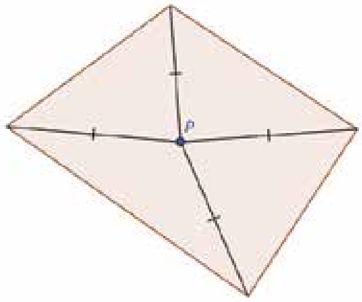
## Problema 6

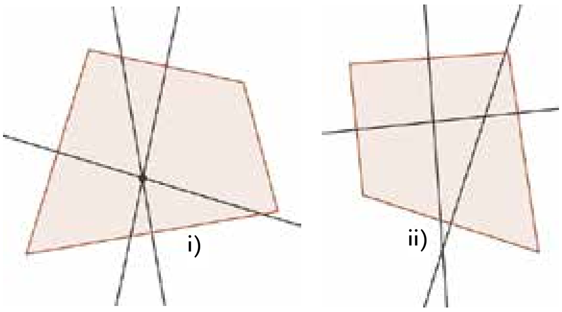
**Encontrar, de ser posible, un punto *P* en el interior del cuadrilátero dado, tal que éste se descomponga en cuatro triángulos isósceles que compartan el vértice *P* y cuyas bases sean los lados del cuadrilátero.**




### Solución:

Notemos primero que, en cualquier cuadrilátero que admita un punto *P* en las condiciones del problema, los triángulos isósceles comparten sus lados distintos de la base, unos con otros como muestra la figura.




Esto fuerza a que los lados de estos triángulos, distintos de las bases, sean todos iguales entre si. De manera que el punto *P* debe equidistar de los vértices del cuadrilátero, entonces habrá que ubicarlo en la intersección de las mediatrices de los lados.

La figura muestra que en el primer caso hay solución, mientras que en el segundo caso no la hay.

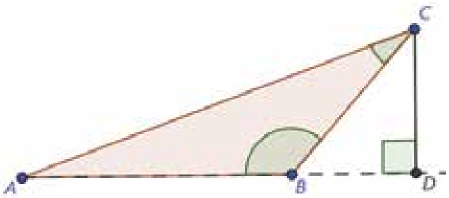
Notemos que es suficiente con que tres de las mediatrices sean concurrentes, porque esto asegura que equidista de los cuatro vétices.

## Problema 7

**En todo triángulo el pie de al menos una de sus alturas está sobre uno de los lados.**

### Solución:

Si una de las alturas cae sobre la prolongación del lado correspondiente, como indica la figura:



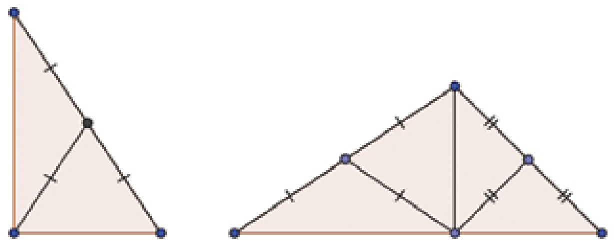

Entonces el ángulo en el vértice *C* es menor que el ángulo en el vértice *B*, porque *B* es un ángulo exterior del triángulo *BDC* y es igual a la suma de los ángulos interiores en *D* y en *C*, vale decir que *B* es mayor que 90°. Por otra parte, los ángulos interiores en *A* y *C* del triángulo *ABC* suman menos de 90°. Luego, el ángulo en *C* es menor que 90° y en consecuencia menor que *B*.

## Problema 8

**Descomponer un triángulo dado en triángulos isósceles con a lo sumo tres cortes lineales.**

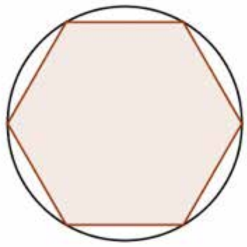
### Solución:

Si el triángulo es rectángulo, para descomponerlo en dos triángulos isósceles, basta con el corte que une el punto medio de la hipotenusa con el vértice opuesto a ésta.

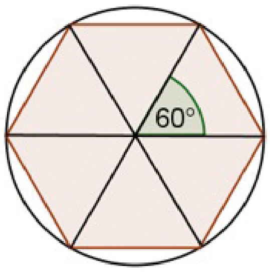


Dado un triángulo cualquiera, hay un vértice cuya altura cae sobre el lado opuesto, según se vio en el problema anterior. Esta altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos y con un corte en cada uno de ellos, podemos obtener cuatro triángulos isósceles.

**Problema 9** El perímetro del hexágono regular inscripto en la circunferencia es 6 cm. Determinar el área y el perímetro de la circunferencia.



**Solución:**




Uniendo los vértices del hexágono con el centro de la circunferencia, se descompone el mismo en seis triángulos isósceles iguales.

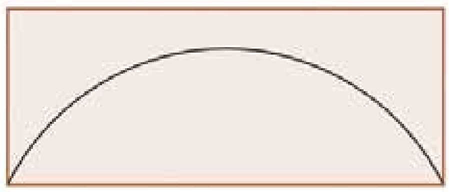
El ángulo opuesto a la base de estos triángulos isósceles mide 60°. Se deduce que estos triángulos son equiláteros y en consecuencia, el radio de la circunferencia tiene el mismo valor que el lado del hexágono, es decir *1 cm*. Ahora podemos calcular el área y el perímetro de la circunferencia:

$$(\pi \times 1^2)\,\mathrm{cm}^2 = \pi\,\mathrm{cm}^2 \cong 3{,}14\,\mathrm{cm}^2$$

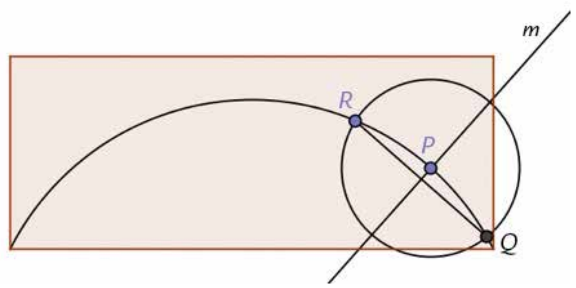
$$(2 \times \pi \times 1)\,\mathrm{cm} = 2\pi\,\mathrm{cm} \cong 6{,}28\,\mathrm{cm}$$

**Problema 10** Se da el arco de circunferencia en el rectángulo como indica la figura:

**Trabajando con regla y compás, sin salir del rectángulo, determinar un segmento de igual longitud que el radio de la circunferencia.**



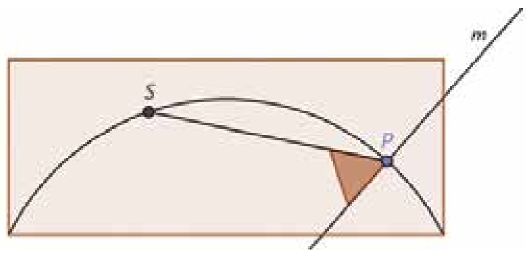
**Solución:**



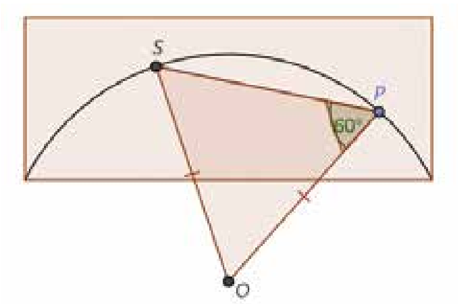

Elijamos un punto *P* sobre el arco para trazar una recta *m* por *P* que pase por el centro de la circunferencia que contiene el arco dado.

Para ello, con centro en *P* se traza una circunferencia para determinar los puntos *Q* y *R* en el arco dado, los cuales equidistan de *P*. La mediatriz de la cuerda *QR* pasa por el centro de la circunferencia que contiene al arco dado.

Con *P* como uno de los vértices y un lado sobre *m*, dibujamos un triángulo equilátero como muestra la siguiente figura:



Prolongamos un lado de triángulo equilátero hasta cortar al arco en el punto $S$. Afirmamos que el segmento $PS$ tiene la misma medida que el radio de la circunferencia.




En efecto, el triángulo cuyos vértices son $P$, $S$ y el centro $O$ de la circunferencia; es isósceles y uno de sus ángulos mide 60°, es decir es un triángulo equilátero y se trata de uno de los seis triángulos en que se dividió el hexágono regular en el problema 8.

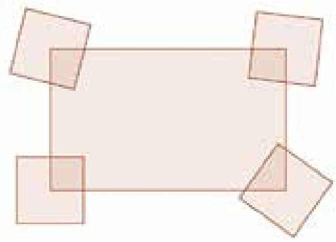
Comentario: En este problema como en el problema 9, se ha usado el siguiente hecho:

- *Si en un triángulo isósceles uno de sus ángulos mide 60°, entonces se trata de un triángulo equilátero.*

¿Cómo comprobaría este hecho?

## Problema 11

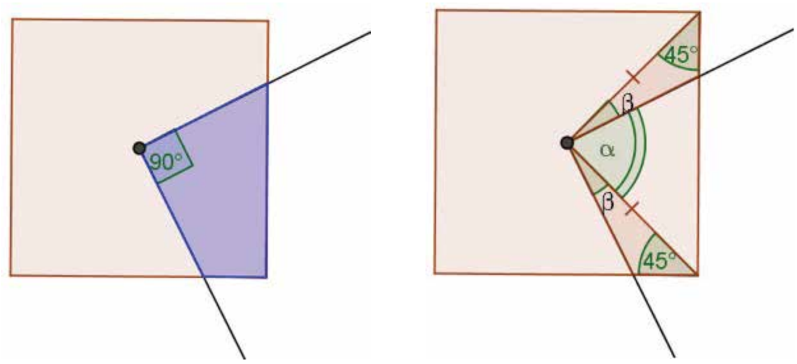
**Con sus centros en los vértices de un rectángulo se ubican cuatro cuadrados de arista 1, como se ilustra en la figura:**



**Hallar el área de la región sombreada, intersección de los cuadrados con el rectángulo.**

## Solución:

Un ángulo recto con vértice en el centro de un cuadrado delimita un cuadrilátero cuya área es la cuarta parte del área del cuadrado.



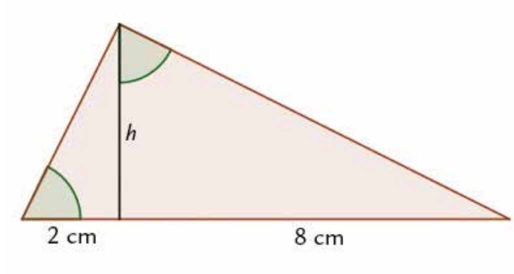

En efecto, trazando los segmentos que unen el centro con dos vértices del cuadrado, se forman dos triángulos iguales porque tienen un lado y los ángulos adyacentes iguales, como se muestra en la figura.

Notar que los ángulos marcados con $\beta$ son ambos complementarios de $\alpha$, es decir $\alpha + \beta = 90°$, y por lo tanto son iguales. En consecuencia, el cuadrilátero puede ser descompuesto en dos triángulos que se reacomodan para formar el triángulo que es la cuarta parte del cuadrado.

Dado que, en el problema enunciado, esta situación se repite en los cuatro vértices, el área de la figura sombreada es igual a 1.

## Problema 12

**La altura bajada desde el vértice en el ángulo recto de un triángulo rectángulo corta a la hipotenusa en dos segmentos cuyas longitudes son 2 cm y 8 cm. Hallar el área del triángulo.**



## Solución:

Notemos primero lo siguiente:

- *Dos triángulos rectángulos con un ángulo no recto igual, son semejantes.*

Esto se comprueba fácilmente teniendo en cuenta la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

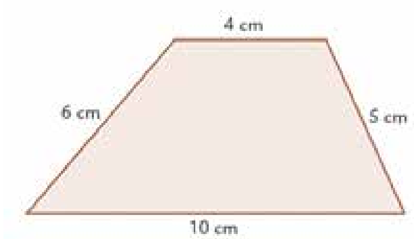
La altura del triángulo dado divide a éste en dos triángulos rectángulos semejantes, de modo que:

$$\frac{8}{h}=\frac{h}{2}$$

Se deduce que la altura es *4* y así, el área buscada es *32* $cm^2$.

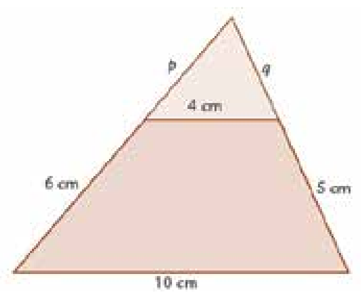
## Problema 13

**En un trapecio como el de la figura, se prolongan dos lados opuestos para formar un triángulo. Calcular el perímetro de dicho triángulo.**




## Solución:

En realidad, luego de prolongar los lados, quedan formados dos triángulos semejantes:




uno de ellos con lados $p$, $q$ y 4 y otro lados $p+6$, $q+5$ y 10. De las relaciones de semejanza:

$$\frac{p+6}{p}=\frac{q+5}{q}=\frac{10}{4}$$

De la igualdad:

$$\frac{p+6}{p}=\frac{10}{4}$$

se obtiene claramente que $p=4$. De la otra igualdad:

$$\frac{q+5}{q}=\frac{10}{4}$$

Resulta:

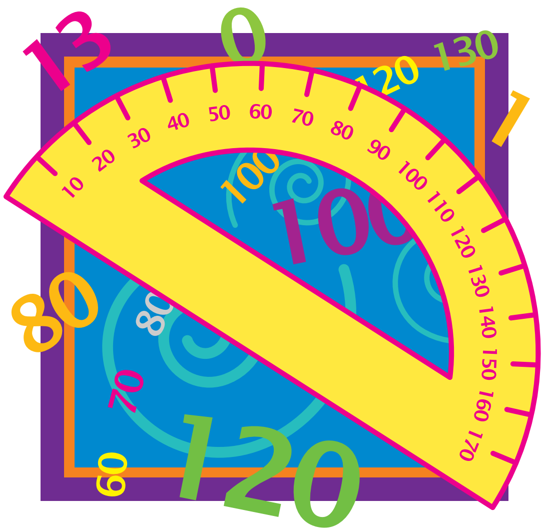
$$1+\frac{5}{q}=\frac{5}{2}$$

O bien:

$$\frac{5}{q}=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$$

de donde $q=\dfrac{10}{3}$ y el perímetro es

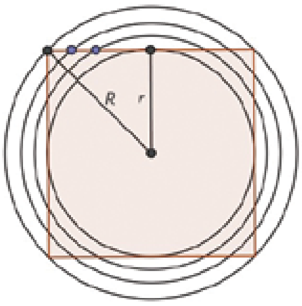
$$10+5+6+4+\frac{10}{3}=\frac{85}{3}.$$

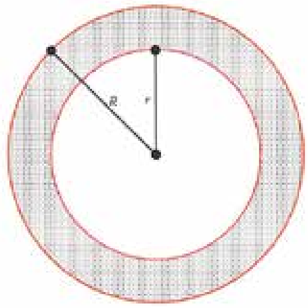


**Problema 14** **Un cuadrado de área 4 cm² gira 360° alrededor de su centro. Hallar el área de la región que recorren sus lados.**

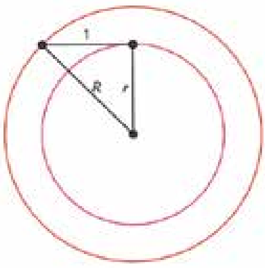
## Solución:

Notemos que se trata de un cuadrado de lado 2 *cm*.



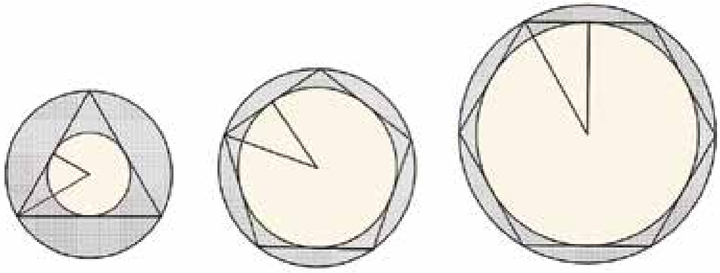




Como muestra la figura, los vértices del cuadrado giran sobre la circunferencia de radio $R$ y los puntos medios de los lados giran sobre la circunferencia de radio $r$. Observamos que por Pitágoras $R$ mide $\sqrt{2}$ *cm* y $r$ mide 1 *cm*. Los demás puntos de los lados giran sobre circunferencias cuyos radios son mayores que $r$ y menores que $R$. En consecuencia la región formada es una corona circular como muestra la siguiente figura de la derecha:




El área de esta corona es la diferencia de las áreas de los círculos que la definen, es decir $\pi\,(R^2 - r^2)$, y dado que, según el teorema de Pitágoras $R^2 - r^2 = 1$, el área de la corona es $\pi$.

Comentario: Un problema análogo se puede formular a partir de un polígono regular en lugar del cuadrado. En los siguientes ejemplos, calcular el área de la corona formada al girar el polígono regular en cada caso, sabiendo que el lado mide 2.

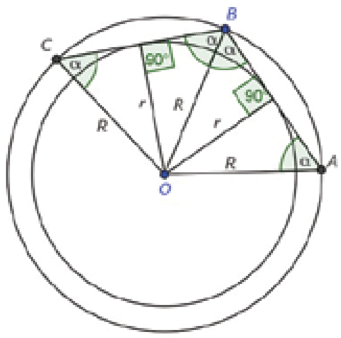


¿Ya descubrió cuánto mide el área de la corona determinada por un polígono regular de 2014 lados, sabiendo que el lado mide 2?

**Problema 15** **Decimos que un polígono está inscripto en una corona circular si sus vértices están en la circunferencia exterior y sus lados son tangentes a la circunferencia interior. Si un polígono se inscribe en una corona ¿es regular?**

## Solución:

Si $A$, $B$ y $C$ son vértices consecutivos del polígono, teniendo en cuenta que los lados del polígono son tangentes a la circunferencia interior, y por tanto perpendiculares a los radios de ésta en los puntos de tangencia, la siguiente figura ilustra la situación.

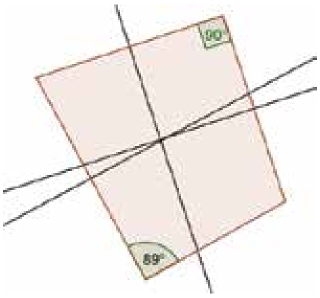



Los triángulos $ABO$ y $BCO$ son isósceles e iguales, porque cada uno se compone de dos triángulos rectángulos de hipotenusa $R$ y un cateto igual a $r$. Luego $AB = BC$ y el ángulo interior en cada vértice del polígono es $2\alpha$. En conclusión el polígono es regular.

**Problema 16** En el cuadrilátero de la figura los ángulos en vértices opuestos miden 90° y 89° respectivamente. Decidir si las mediatrices de los lados del cuadrilátero son concurrentes.

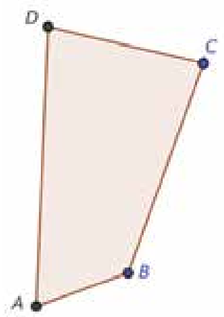

## Solución:

Al trazar tres de las mediatrices, éstas parecen concurrir en un punto *P*:

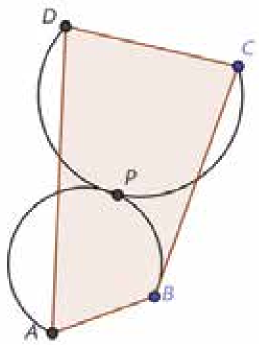



Si así fuera, la mediatriz restante también pasaría por *P*, compruebe esta afirmación usando la definición de mediatriz. Sin embargo, se puede establecer que las mediatrices no son concurrentes. Para esto hacemos notar que en un cuadrilátero inscriptible, los ángulos en vértices opuestos suman *180°* según se dedujo en la construcción del arco capaz dada en el apéndice.

**Problema 17** Desde un punto *P* en el interior del cuadrilátero *ABCD* se forma el ángulo *CPD* = 60° y el ángulo *APB* = 45°. Usando reglas y compás ubicar el punto *P* en la figura.




## Solución:

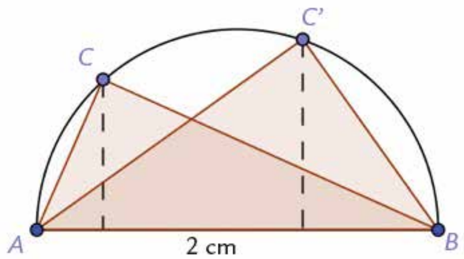


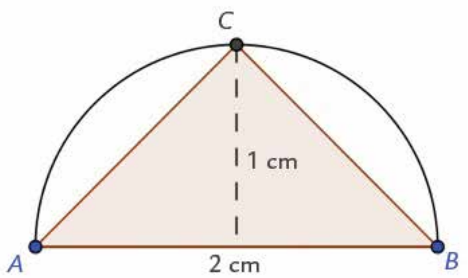

El punto *P* será un punto en la intersección de los arcos capaces correspondientes a los segmentos *CD* y *AB*, asociados con las ángulos de 60° y 45° respectivamente.

**Problema 18** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2 cm. ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar el área de este triángulo?

## Solución:

Si el segmento *AB* es la hipotenusa, el tercer vértice *C* de este triángulo se encontrará sobre el arco capaz asociado a *AB* y a 90°, es decir en un semicírculo que tenga a *AB* como diámetro.



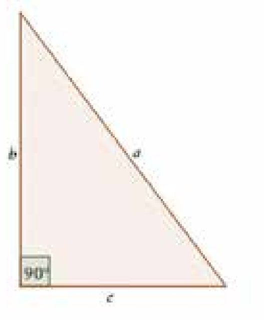




Es claro que el triángulo de mayor área es el que tenga la mayor altura, la que se da en el triángulo isósceles donde la altura es igual a 1 cm y consecuentemente, el área máxima es igual a 1 cm$^2$.

## Resultados aplicables a la resolución de los problemas

### Teorema de Pitágoras

*En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

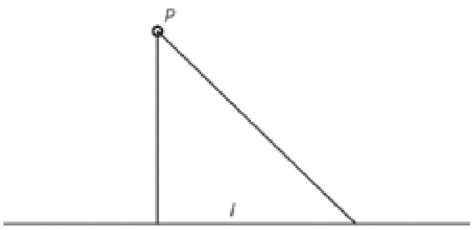



$a^2 = b^2 + c^2$

También se cumple la afirmación recíproca:

*Si en un triángulo, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, el triángulo es rectángulo.*

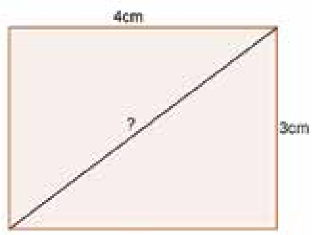
Como consecuencia del teorema de Pitágoras, tenemos las propiedades siguientes:




*Entre los segmentos con uno de sus extremos sobre un punto fijo P y el otro sobre una recta l, a la cual P no pertenece, el más corto es aquel que resulta perpendicular a l. La longitud de este segmento se conoce como la distancia entre el punto P y la recta l.*

*La longitud de la altura sobre un lado de un triángulo (o su prolongación), es menor o igual que las longitudes de los otros lados.*

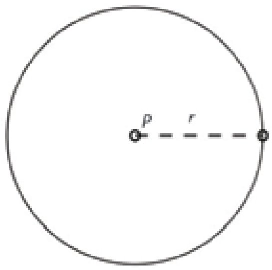
El teorema de Pitágoras permite calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo a partir de las longitudes de sus lados.




### Lugares geométricos

En geometría es habitual usar la expresión **lugar geométrico**, para hacer referencia al conjunto de todos los puntos del plano o del espacio que satisfacen ciertas propiedades enunciadas.

A continuación damos algunos ejemplos de lugares geométricos.

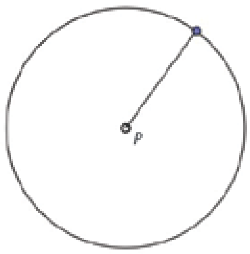



**Circunferencia:** *Es el conjunto de puntos del plano que guardan una misma distancia r con un punto dado P. El punto P se llama el centro de la circunferencia y la distancia r, se llama el radio de la circunferencia.*

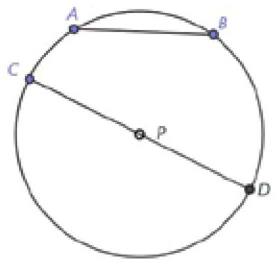
Además del centro y el radio, destacamos a continuación otros elementos asociados con una circunferencia.

Es usual usar también el término radio en el sentido siguiente:

*Un radio en una circunferencia es un segmento que une su centro con un punto de la circunferencia.*

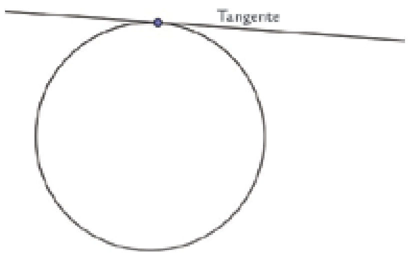


**Cuerda y diámetro:** *Una cuerda de una circunferencia es un segmento cuyos extremos se encuentran sobre la circunferencia. Un diámetro en una circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.*

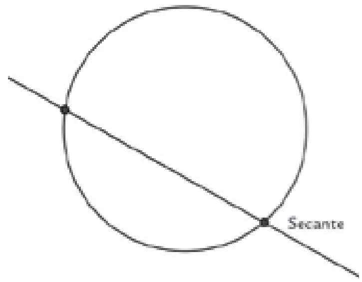



La intersección entre una recta y una circunferencia, tiene a lo sumo dos puntos. Si hay dos puntos en la intersección, la recta se llama *secante a la circunferencia*, en cambio, si hay sólo un punto, la recta se llama *tangente a la circunferencia*.

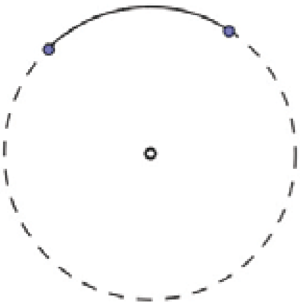
**Recta tangente**



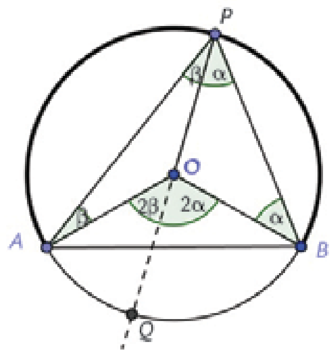

**Recta secante**




**Arco de Circunferencia:** *Es un trozo de circunferencia limitado por dos puntos sobre una circunferencia dada.*



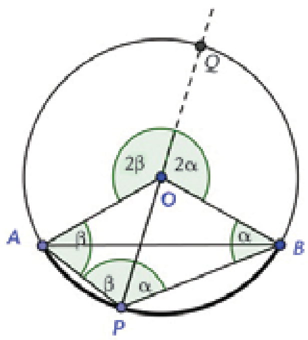
**Nota:** Si un punto *P* se encuentra en el arco *AB* como muestra la figura, entonces el ángulo *APB* es la mitad del ángulo central *AOB*:

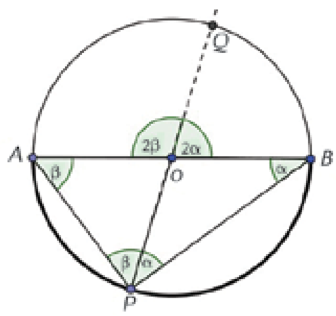


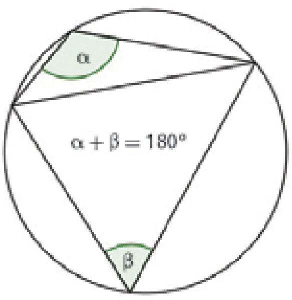

El centro *O* de la circunferencia, permite descomponer el triángulo *APB* en tres triángulos isósceles. Teniendo en cuenta que en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los interiores no adyacentes, los datos consignados en la figura quedan justificados y en consecuencia la validez del enunciado.

Corresponde aclarar que otras situaciones pueden darse según la posición del punto *P* respecto de la cuerda *AB* y el centro *O*.

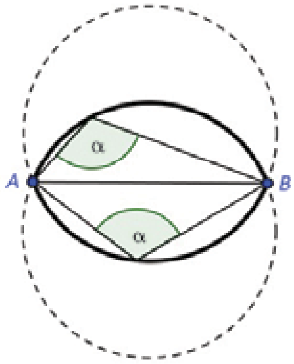
En la segunda figura se observa que si la cuerda es un diámetro, el ángulo en el vértice *P* es de 90°, ya que $2\alpha + 2\beta$ es llano.



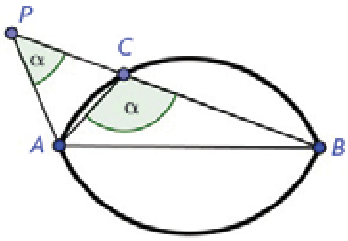

En conclusión, dada una cuerda, cada punto *P* de uno de los arcos, determina el mismo ángulo al unirse con *A* y *B*, cuyo valor es la mitad del ángulo central que cubre el arco complementario. Como los ángulos centrales suman 360°, dos ángulos en arcos complementarios sumarán 180°.




**Arco capaz:** *Dado un segmento AB y un ángulo α, se llama arco capaz asociado al segmento AB y al ángulo α, al conjunto de puntos P del plano tales que el ángulo APB sea igual a α.*

La siguiente figura ilustra un arco capaz para un ángulo α mayor que cero, como la unión de dos arcos de circunferencias de igual radio, excluidos los extremos *A* y *B*.

La construcción con regla y compás de un arco capaz se dará más adelante. Para justificar que no hay un punto *P* en el lugar geométrico que no esté en la unión de estos arcos, consideremos primero que *P* es exterior a la región limitada por los arcos. Uno de los segmentos *PB* o *PA* cortan a uno de los arcos en un punto *C*. Suponiendo que sea *PB*, se tendría la situación dada por la figura:




De modo que el ángulo *ACB* es exterior al triángulo *APC* y es la suma de los interiores no adyacentes, entonces debe ser el ángulo $CAP = 0$ y consecuentemente, $P = C$.

Si *P* se encontrara en el interior de la región, dejamos a cargo del lector dar una demostración.

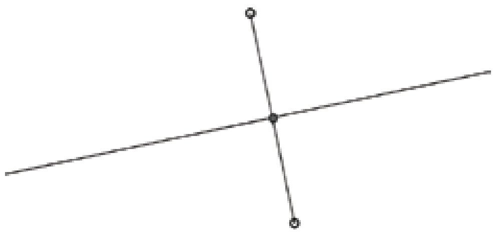
Un caso especial ocurre cuando el ángulo α es cero, el lugar geométrico se reduce a la recta que contiene al segmento *AB*.

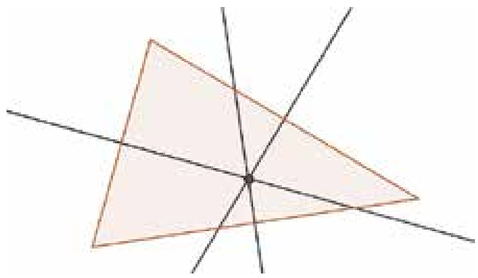
**Mediatriz:** *Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos dados*

La mediatriz entre los puntos *A* y *B*, es precisamente la recta perpendicular al segmento *AB* que pasa por el punto medio de este segmento.

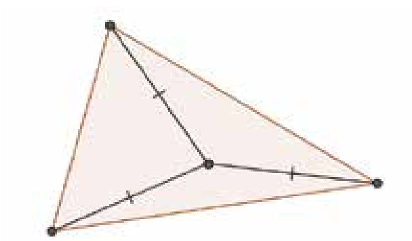
También se hace referencia a la mediatriz de un segmento como a la mediatriz de los extremos del segmento.

Un hecho destacado, en relación con este lugar geométrico, es el siguiente: *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.*

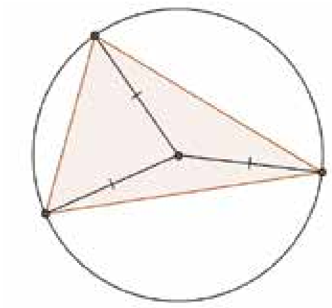




Esto es así, porque el punto de intersección de dos de estas mediatrices, resulta equidistante de los tres vértices del triángulo.



De esto surge que:

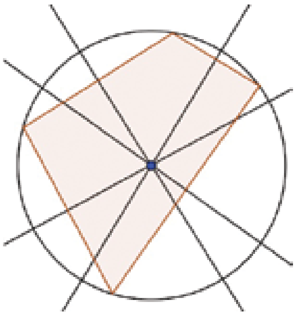


*Todo triángulo puede ser inscripto en una circunferencia, llamada circunferencia circunscripta al triángulo.*

Es oportuno observar que esta circunferencia es única, ya que su centro será necesariamente el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo y el radio, la distancia desde este punto a cualquiera de los vértices.

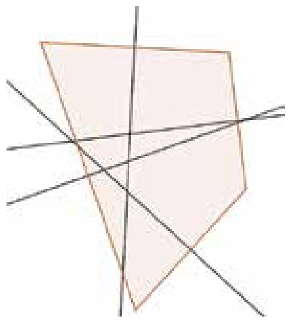
En general, para poder inscribir un polígono en una circunferencia es necesario que las mediatrices de sus lados sean concurrentes, pero esto no siempre ocurre. Veamos un par de ejemplos con cuadriláteros:

*Las mediatrices son concurrentes*



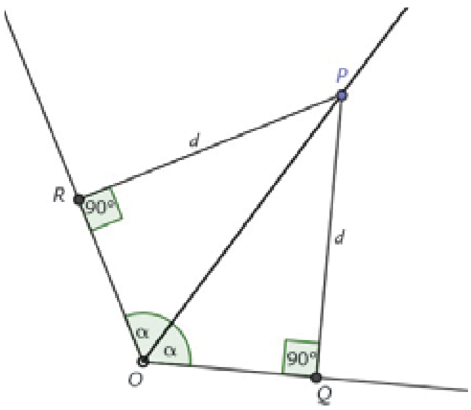
El punto común en las mediatrices, es el centro de la circunferencia circunscripta al cuadrilátero.

*Las mediatrices no son concurrentes*



En este caso, las intersecciones de las mediatrices determinan seis puntos.

**Bisectriz:** *Es el conjunto de puntos que equidistan de los lados de un ángulo dado. Este consiste en los puntos de la semirecta que secciona al ángulo en dos ángulos iguales.*

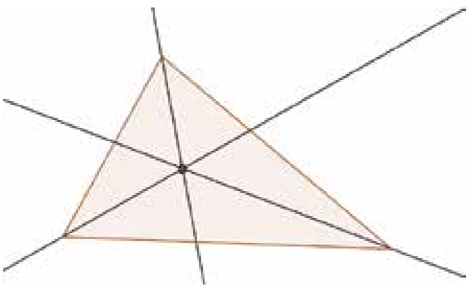



En la figura, $P$ es un punto en la bisectriz de un ángulo $QOR$, es decir $P$ está a una misma distancia $d$ de los lados del ángulo. De esto se concluye que los triángulos $OQP$ y $OPR$ son iguales, debido al principio:

*Dos triángulos con un par de lados iguales y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son iguales.*

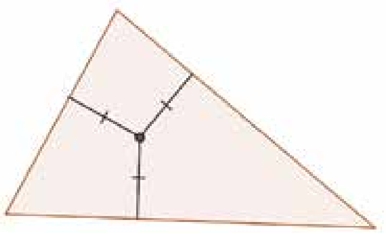
Es decir, también resultan iguales los ángulos $QOP$ y $PQR$.

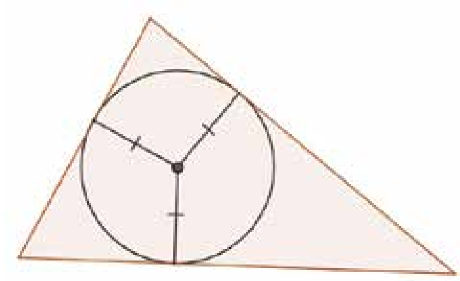
Comentario: El principio enunciado, se propuso en la nota 1 para análisis a cargo del lector.



Tal como ocurre con las mediatrices, las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes. Es decir, el punto de intersección de dos de ellas se encuentra necesariamente en la bisectriz restante.

Este punto equidista de los tres lados del triángulo



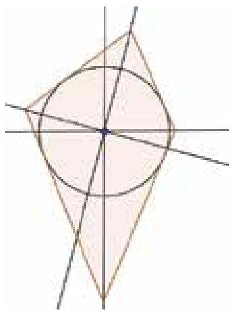


Es oportuno destacar en este caso, que los lados del triángulo son tangentes a la circunferencia con centro en el punto común a las bisectrices que tiene por radio a la distancia de este punto a los lados del triángulo.

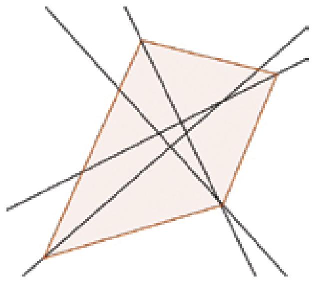
Esta circunferencia se llama *circunferencia inscripta al triángulo*.

No siempre es posible inscribir una circunferencia en un polígono, es decir construir una circunferencia que sea tangente a los lados de un polígono dado. Para poder hacerlo, es necesario que las bisectrices de los ángulos interiores del polígono sean concurrentes. Los ejemplos siguientes ilustran las situaciones con cuadriláteros.

*Bisectrices concurrentes*

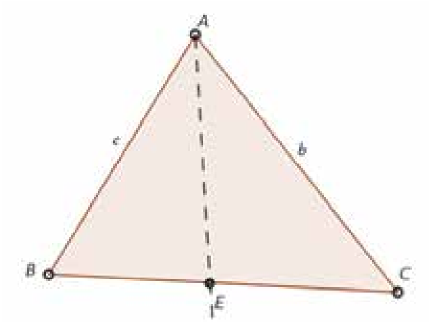


*Bisectrices no concurrentes*



Una propiedad de la bisectriz de un ángulo de un triángulo.

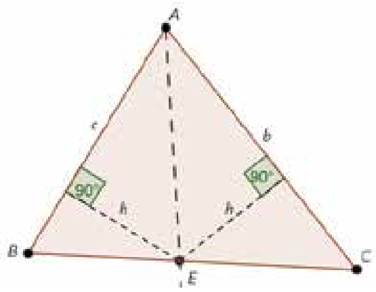
*La bisectriz del ángulo con vértice A, en el triángulo ABC, divide al lado BC en segmentos proporcionales a los lados b y c. De modo más preciso con los datos de la figura:*

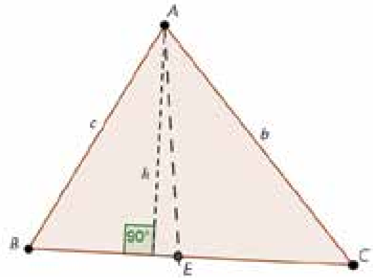



*se verifica:*

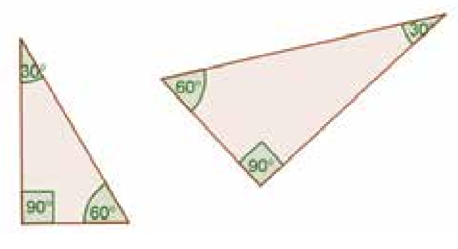
$$\frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}$$

Esta igualdad se obtiene de establecer la relación entre las áreas de los triángulos *AEC* y *ABE*, de dos maneras distintas. Dejamos esta comprobación como tarea para el lector y un par de figuras que pueden servir de orientación.




## Semejanza

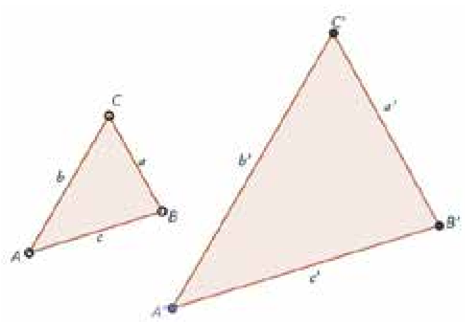



*Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos.*

Por ejemplo, mostramos dos triángulos cuyos ángulos son de 30°, 60° y 90°

Se observa que el segundo de los triángulos se obtiene del primero mediante una ampliación de esta figura, o también, que el primer triángulo es una reducción de la figura del segundo.

## Propiedades de los lados de triángulos semejantes

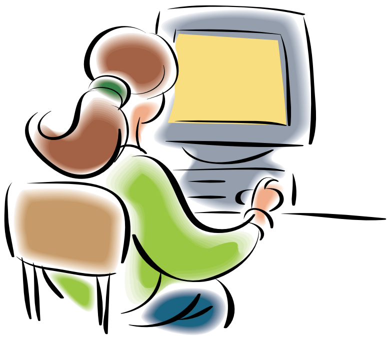


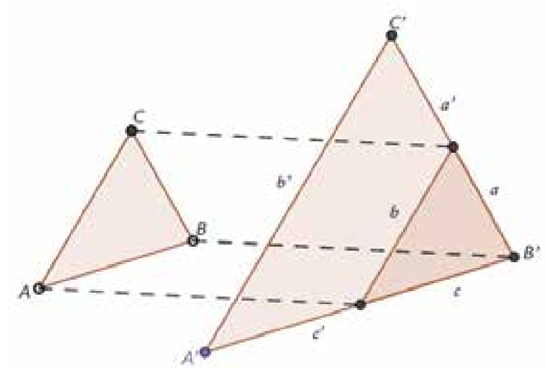
Consideremos *A,B,C* y *A',B',C'* dos triángulos semejantes tales que los ángulos en los vértices *A,B,C* son respectivamente iguales a los ángulos en los vértices *A',B',C'*.

*Si a,b,c y a',b',c' son los respectivos lados de dos triángulos semejantes, entonces se verifica:*

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

En efecto, inscribiendo ambos triángulos sobre el ángulo en el vértice *B'*, como indica la figura:

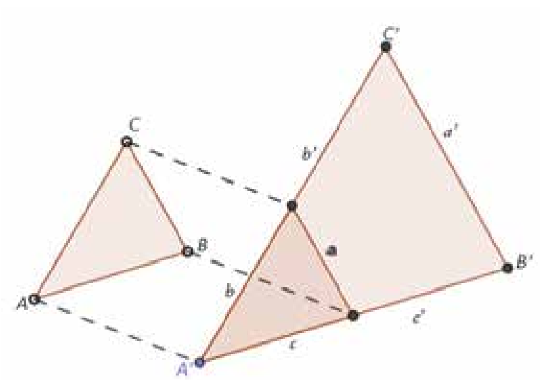




los lados *b* y *b'* son paralelos. Usando el Teorema de Thales resulta:

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

Análogamente, inscribiendo los triángulos sobre el ángulo en el vértice *A'*:



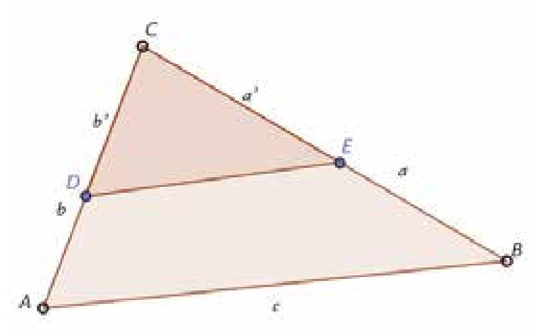
resulta:

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

La afirmación en la dirección contraria, también es válida, es decir; si $a$, $b$, $c$ y $a'$, $b'$, $c'$ son los respectivos lados de dos triángulos que verifican:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

entonces, los triángulos son semejantes. En efecto, sobre el triángulo de lados *a,b,c* dibujamos un triángulos de lados $CE=a'$ y $CD=b'$ como se muestra en la figura:



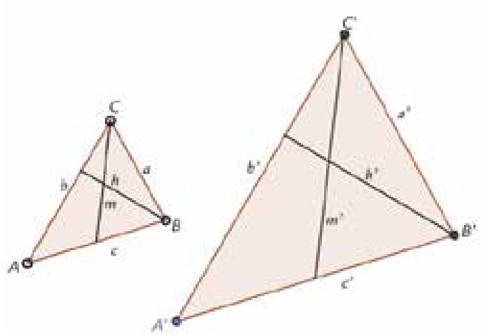
Nuevamente, por el teorema de Thales, los segmentos *DE* y *AB* deben ser paralelos, puesto que:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

En consecuencia los triángulos en la figura son semejantes y se cumple:

$$\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{DE}$$

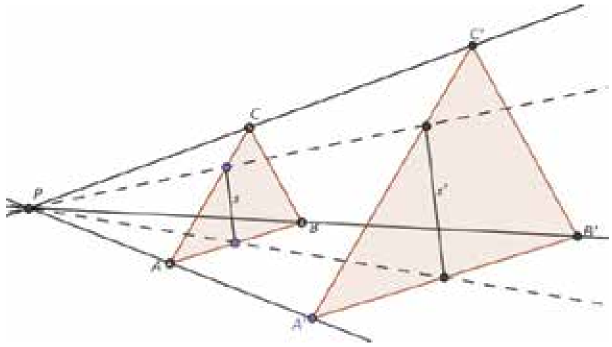
Es decir, resulta $c'=DE$.




Observación: Los pares de lados $a,a'$, $b,b'$ y $c,c'$ en la situación anterior de dos triángulos semejantes, se llaman *lados homólogos*. La relación entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes, también se conserva entre otros segmentos homólogos tales como las alturas, las medianas, etc.

En la figura precedente, $m$ y $m'$ son medianas homólogas y $h$ y $h'$ son alturas homólogas en triángulos semejantes, entonces:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{m}{m'}=\frac{h}{h'}$$




Se puede poner en correspondencia cada segmento en un triángulo con un segmento homólogo en otro triángulo semejante como se indica a continuación. Dibujamos ambos triángulos de modo que los lados homólogos queden paralelos y unimos con rectas los pares de vértices homólogos, las que concurren en un punto $P$.

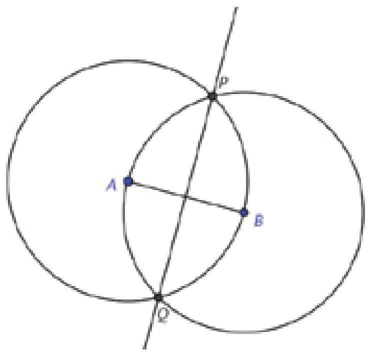
A cualquier segmento $s$ con vértices en los lados de $ABC$, le corresponde un segmento homólogo $s'$ en $A'B'C'$. Este segmento se obtienen como los puntos de intersección de las rectas que partiendo desde $P$ pasan por los extremos de $s$, con los lados en $A'B'C'$ que son homólogos a lados de $ABC$ que contienen los extremos de $s$. Usando el Teorema de Thales, se podrá establecer que:

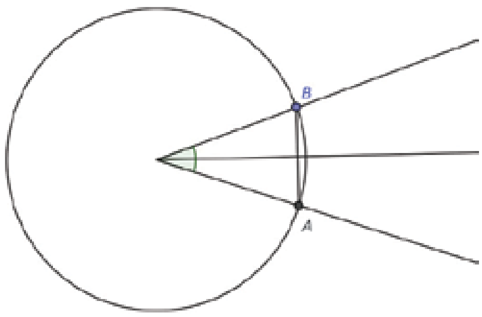
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{s}{s'}$$

## Construcciones con regla y compás

Dejamos a cargo del lector, verificar que las construcciones propuestas en cada caso son correctas.

**Mediatriz:** Es suficiente marcar dos puntos en la mediatriz. En la figura, la mediatriz entre los puntos $A$ y $B$, queda determinada por los puntos $P$ y $Q$ ubicados en la intersección de las circunferencias: una concentro $A$ que pasa por $B$ y la otra con centro $B$ que pasa por $A$.

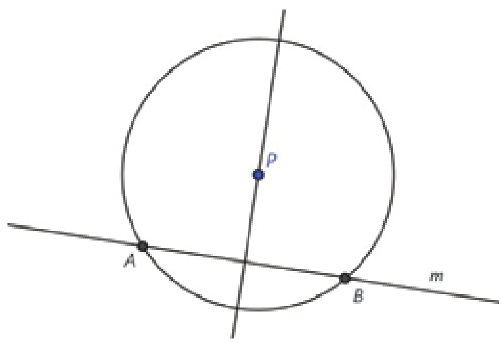


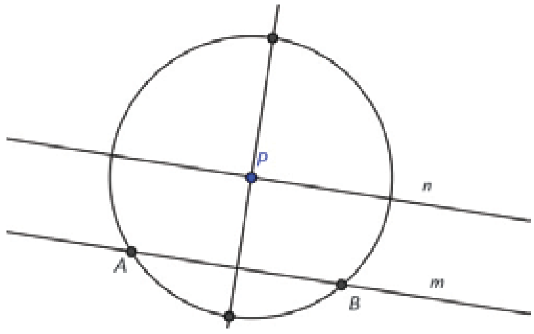

**Bisectriz:** Dibujando una circunferencia con centro en el vértice del ángulo, se determinan los puntos $A$ y $B$ sobre las semirrectas que limitan el ángulo. La bisectriz es la mediatriz de los puntos $A$ y $B$.

**Recta Perpendicular:** Dados la recta $m$ y el punto $P$, vemos cómo trazar la recta $l$ tal que sea perpendicular a $m$ y que pase por el punto $P$.

Se traza una circunferencia con centro en $P$ que corte a $m$ en los puntos $A$ y $B$. La mediatriz entre $A$ y $B$ es la recta buscada.

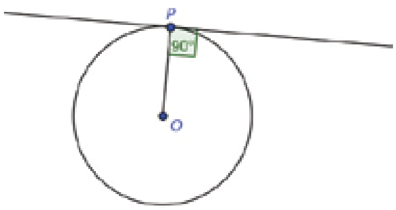


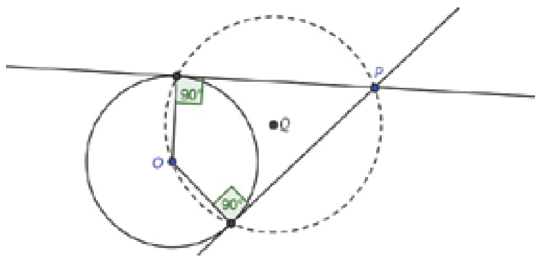
**Recta Paralela:** Dados la recta *m* y el punto *P* que no pertenezca a *m*, vemos cómo trazar la recta *n* que sea paralela a *m* y que pase por el punto *P*.




Se traza una circunferencia con centro en *P* que corte a *m* en los puntos *A* y *B*. La mediatriz entre *A* y *B* corta a la circunferencia en los puntos *C* y *D*, la mediatriz entre los puntos *C* y *D* es la recta buscada.

**Recta tangente a una circunferencia:** Dada una circunferencia con centro *O* y dado un punto *P* que no se encuentre en el interior del círculo que limita la circunferencia, vemos cómo trazar la recta tangente a la circunferencia que pase por el punto *P*.



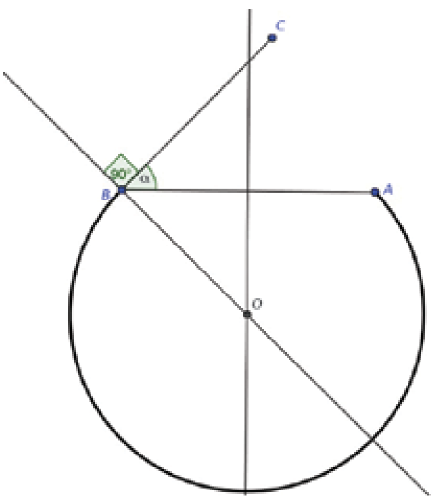




Si el punto *P* está en la circunferencia, la recta tangente es la recta perpendicular a la recta que une *P* con *O* y que pasa por *P*.

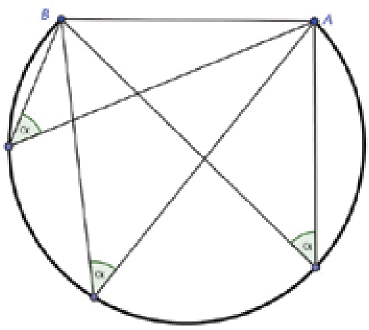
Si *P* no está en la circunferencia, con centro en el punto medio *Q* entre *P* y *O*, trazamos una circunferencia que pase por *P*, ambas circunferencias se cortan en los puntos *A* y *B*. Hay dos rectas tangentes a la circunferencia dada que pasan por *P*, una es la que une *P* con *A* y la otra, la que une *P* con *B*.

**Arco Capaz:** Dados el segmento *AB* y un ángulo $\alpha$, vemos cómo trazar el arco capaz con cuerda *AB* asociado al ángulo $\alpha$.

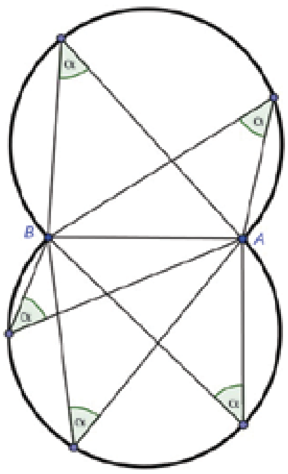
Dibujamos un ángulo *ABC* del mismo valor que $\alpha$, como se indica en la figura:



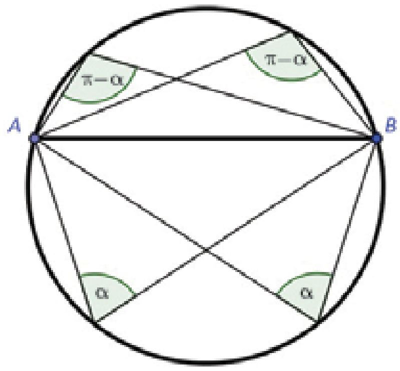

La mediatriz de *AB* y la perpendicular al segmento *BC* que pasa por *B*, se intersecan en un punto *O*, el arco que con centro en *O* une *B* con *A* es el arco capaz buscado.



Nota: Es claro que hay otra componente del arco capaz asociado con el segmento *AB* y el ángulo $\alpha$, esta se construye en el otro lado del segmento como se muestra en la figura:

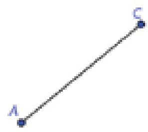



Comentario: Una cuerda *AB* de una circunferencia, divide a la misma en dos arcos complementarios. Sobre cualquier punto de uno de estos arcos, se forma un mismo ángulo $\alpha$ al unirlo con *A* y *B*, mientras que sobre los puntos del otro arco, se forma el ángulo $\pi - \alpha$.

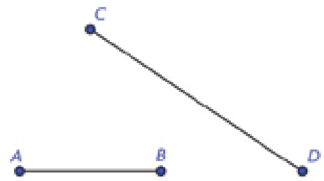



## Problemas Propuestos

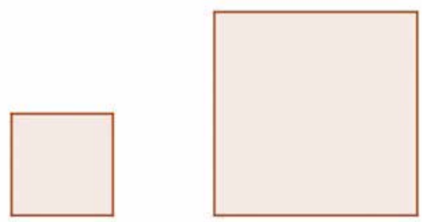
**1.** El segmento AC es una diagonal del cuadrado ABCD. Reconstruir el cuadrado.
Si el segmento AC fuera una diagonal del rectángulo ABCD, que no es cuadrado, ¿es posible reconstruirlo?




**2.** Los segmentos AB y CD son un lado y la diagonal de un rectángulo. Reconstruir el rectángulo.

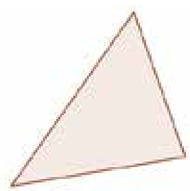



**3.** Usando regla y compás, construir un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados dados en la figura:



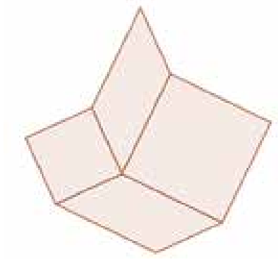
**4.** El segmento en la figura mide una unidad, usando regla y compás, construir un segmento de longitud igual a raíz de 2.


**5.** Dado un triángulo de área 1, construir usando regla y compás un triángulo semejante al dado de área 2.

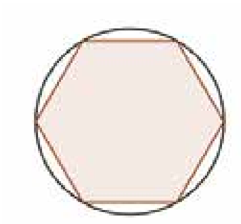


**6.** Determinar los radios de las circunferencias inscritas y circunscriptas a un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 respectivamente.

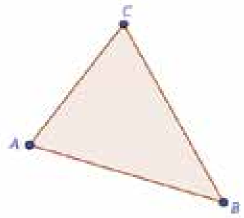
**7.** Dos cuadrados y dos paralelogramos se unen como muestra la figura:
La distancia entre los centros de los cuadrados es 2 cm, ¿Cuánto es la distancia entre los centros de los paralelogramos?
Sugerencia: Usar un programa de geometría interactiva para visualizar esta situación. ¿Qué otra propiedad observa?



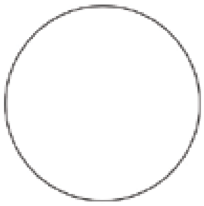
**8.** Un hexágono regular de perímetro 6cm se haya inscripto en una circunferencia. Determinar el perímetro de esta circunferencia.



**9.** Inscribir un triángulo PQR en el triángulo de papel ABC de modo que al recortar PQR de ABC se obtengan tres triángulos isósceles.

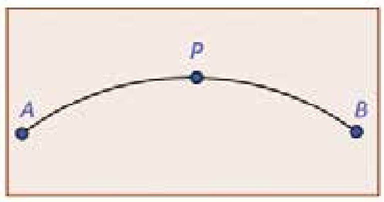



**10.** Usando regla y compás, determinar el centro de la circunferencia:

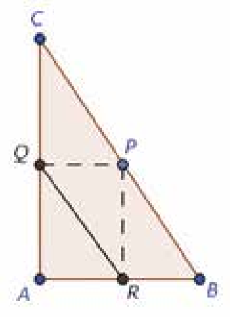


**11.** Un rombo se haya inscripto en una circunferencia de radio 2cm. Hallar el área del rombo.

**12.** Usando regla y compás, trazar la tangente en el punto P sobre el arco de circunferencia *AB*.




**13.** En el triángulo rectángulo ABC, desde un punto P de la hipotenusa se trazan perpendiculares a los catetos determinado los puntos Q y R. Ubicar P para que el segmento QR sea de longitud mínima.
Sugerencia: Usar un programa de geometría interactiva para visualizar esta situación.

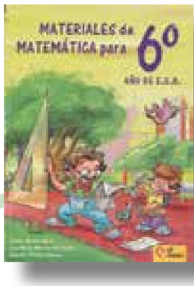



**14.** Seccionar un cubo con un plano de modo que en uno de los semiespacios quede exactamente:

i) un vértice.
ii) dos vértices.
iii) tres vértices.
iv) cuatro vértices.

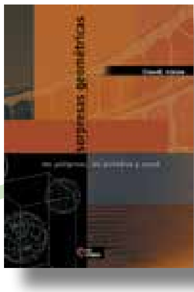
# BIBLIOGRAFIA

Área y Volumen en la Geometría Elemental.
*José Araujo, Guillermo Keilhauer, Norma Pietrocola, Valeri Vavilov* –Red Olímpica–




Materiales de Matemática para 6º año EGB.
*Carlos Bosch Giral, Luz María Ma rván Garduño, Agustín Prieto Huesca* –Red Olímpica–

Resolviendo Problemas de Matemática.
*Juan Ignacio Fuxman Bass* –Red Olímpica–



Sorpresas Geométricas.
*Claudi Alsina* –Red Olímpica–


Viaje al país de los rectángulos.
*Claudi Alsina* –Red Olímpica–

Colección de Problemas Ñandú.
*Julia Seveso, Graciela Ferrarini* –Red Olímpica–

**Colección New Mathematical Library de la Mathematical Association of America.**

Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 1. *Enzo Gentile*

Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 2. *Enzo Gentile*

Retorno a la Geometría.
*H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer*

El Ingenio en las Matemáticas.
*Ross Honsberger*

Métodos Matemáticos de la Ciencia. *George Pólya*